数理解析研究所講究録
382巻 1980年 54-67

二次元フーリエ展開における $N\log_2 N$ 個の係数の選択的計算法

名大工学部情報工学科　杉浦　洋
鳥居　達生
二宮　市三

1．概要

今，二実変数複素数値函数 $f(x,y): 0 \leq x,y < 2\pi$ が，次の様に展開されたとする。

$$f(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty} a(m,n)e^{imx}e^{iny} \qquad (1-1)$$

負巾の項は説明の簡単のために省く。i は虚数単位である。

ＦＦＴにより $a(m,n)$ を求めるにあたり障害となるのは，必要な精度を得るためには，膨大な標本数を要しがちな事である。又，応々にして絶対値の小さな重要でない係数の計算のために，多くの計算量を費してしまう事である。本研究では，主要な（絶対値の大きな）成分のみを計算することにより，標本点数と計算量を減少させる事を考えた。

以下，Ｍ，Ｎ及びそれに添字の付いたものは，２の巾の自然数であり，離散型フーリエ変換の分割数を表わすものとする。

本方法では，図1の灰色部の様に絶対値の大きい係数が分布する時，図の様に

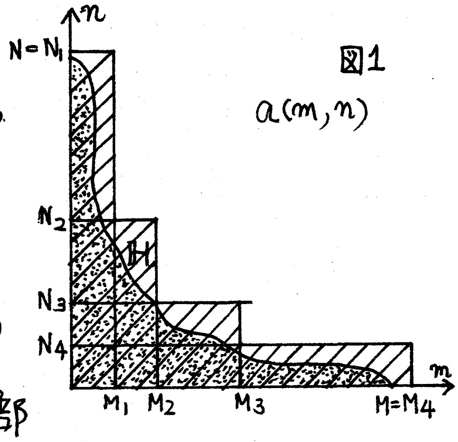


図1

$$\begin{cases} 1 \leq M_1 < M_2 < \cdots < M_K = M \\ N = N_1 > N_2 > \cdots > N_K \geqq 1 \end{cases}$$ （図では K=4）

をとって主要部を含む階段状の斜線部 $\mathbb{H}$ 上の係数のみを計算する。この事により，求めるべき係数 $a(m,n)$ の個数（=標本点数）はＦＦＴの単なる直積による時の MN 個に対し

$$\sum_{I=1}^{K} M_I N_I - \sum_{I=1}^{K-1} M_I N_{I+1} \text{ 個} \qquad (1-2)$$

となる。特に，$M=N$，$\begin{cases} M_I = 2^{I-1} \\ N_I = 2^{K-I} \end{cases}$ とするなら，$\mathbb{H}$ は双曲線 $mn=2^K$ と m,n 軸，及び直線 $m=M$，$n=N$ で囲まれた図形にほぼ等しく，直積型ＦＦＴとの標本数比は約 $N^2 : N\log_2 N$ である。

以下，対象とする函数を $f(x,y)$ に固定して，$\mathbb{P}$ を本方法における標本点集合，$C(m,n) \mid (m,n) \in \mathbb{H}$ を本方法による計算値（$\mathbb{P}$ 上の離散型フーリエ係数）とする。本方法は次の特徴を持つように考案された。

(A) 分割数の異なるいくつかの直積型ＦＦＴの線型和である。

(B) $\{e^{imx}e^{iny}\}_{(m,n)\in\mathbb{H}}$ は $\mathbb{P}$ 上に離散化された函数族の基底をなし，本方法による変換は f の $\{e^{imx}e^{iny}\}_{(m,n)\in\mathbb{H}}$ による補間型展開の展開係数を与える。即ち

$$f(x,y)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{H}} C(m,n)\,e^{imx}e^{iny} \qquad (x,y)\in\mathbb{P} \tag{1-3}$$

$(f(x,y))_{(x,y)\in\mathbb{P}} \xrightarrow{C} (C(m,n))_{(m,n)\in\mathbb{H}}$ は(A)より線型変換であるから，$\mathbb{P}$ と $\mathbb{H}$ の要素の個数が等しければ(B)は次の(B')と同値である。

(B') すべての $(m,n)\in\mathbb{H}$ について

$$C(m,n)=a(m,n)+\sum_{(m',n')\notin\mathbb{H}} \alpha_{m,n,m',n'}\,a(m',n') \tag{1-4}$$

($\alpha_{m,n,m',n'}$ は f によらぬ定数)

(B') は，$C(m,n)$ が誤差項に絶対値の大きい $a(m',n')$；$(m',n')\in\mathbb{H}$ の項を含まない事を保証している。以下の説明を容易にするために，使用される記号のいくつかをまとめて説明しておく。

2．記号の説明

〈1〉2次元格子点集合 $\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+$ とその部分集合，特性函数

[定義 2-1] $\mathbb{N}^+$ を非負整数の全体とする。

[定義 2-2] $\mathbb{H}_{M,N}=\{(m,n)\,;\,0\le m\le M-1,\ 0\le n\le N-1\}$

定義 2-2 より $\mathbb{H}=\bigcup_{I=1}^{K}\mathbb{H}_{M_I,N_I}$ ———— (2-1)

[定義 2-3] $\mathbb{A}\subset\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+$ の特性函数 $\chi(\mathbb{A}):\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+\longrightarrow\mathbb{C}$

$$\chi(\mathbb{A})(m,n)=\begin{cases}1 & もし\ (m,n)\in\mathbb{A}\\ 0 & もし\ (m,n)\notin\mathbb{A}\end{cases} \tag{2-2}$$

明らかなように，$\mathbb{A},\mathbb{B}\subset\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+$ に対して

$$\chi(\mathbb{A})+\chi(\mathbb{B})=\chi(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})+\chi(\mathbb{A}\cap\mathbb{B}) \tag{2-3}$$

$$\chi(\mathbb{A})=\chi(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})+\chi(\mathbb{A}-\mathbb{B}) \tag{2-4}$$

<2> $\varphi, \psi : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{C}$ の内積 $(\varphi, \psi) \in \mathbb{C}$

[定義 2-4] $(\varphi, \psi) \equiv \sum_{(m,n)\in \mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+} \varphi(m,n)\cdot\psi(m,n)$ ——— (2-5)

<3> 直積型フーリエ展開

[定義 2-5] x方向M分割台型則，y方向N分割中点則の直積による変換における標本点集合と係数を次の様に書く。

標本点集合 $\mathbb{P}_{\overline{M},N} \equiv \{(2\pi i/M, 2\pi(j+\frac{1}{2})/N : (i,j)\in \mathbb{H}_{M,N}\}$ ——— (2-6)

離散型フーリエ係数 $C_{\overline{M},N}(m,n) \equiv \frac{1}{MN}\sum_{(x,y)\in\mathbb{P}_{\overline{M},N}} f(x,y)e^{-imx}e^{-iny}$ ——— (2-7)
$(m,n)\in\mathbb{H}_{M,N}$

$\overline{M}$ の $^-$ は，台形則を用いた方向を示す。従って

	標本点集合	離散型フーリエ係数
台形則×台形則	$\mathbb{P}_{\overline{M},\overline{N}}$	$C_{\overline{M},\overline{N}}(m,n)$
中点則×台形則	$\mathbb{P}_{M,\overline{N}}$	$C_{M,\overline{N}}(m,n)$
中点則×中点則	$\mathbb{P}_{M,N}$	$C_{M,N}(m,n)$

とそれぞれ書く事にする。これらは，全てFFTによって能率的に計算される。

3. 標本点集合 $\mathbb{P}$

直積型の離散型フーリエ展開を基本として構成するために，$\mathbb{P}$ は $\mathbb{H}$ に含まれる極大な長方形領域 $\mathbb{H}_{M_I,N_I} : 1\le I\le K$ 上の係数を台形則×台形則で求めるためのすべての標本点より成る。即ち，

$$\boxed{\mathbb{P} = \bigcup_{1\le I\le K} \mathbb{P}_{\overline{M_I},\overline{N_I}} \quad\text{——— (3-1)}}$$

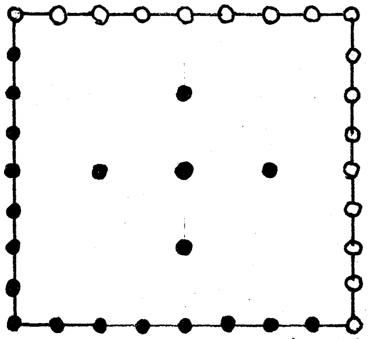
このように定めることにより，$\mathbb{P}$ と $\mathbb{H}$ の要素の個数は等しく，(B)を満足する変換が存在するなら，それは唯一つである。

［$\mathbb{P}$の分布の例］

$$K=4 \text{で} \begin{cases} M_1=4,\ M_2=8,\ M_3=16,\ M_4=32 \\ N_1=16,\ N_2=8,\ N_3=4,\ N_4=2 \end{cases}$$

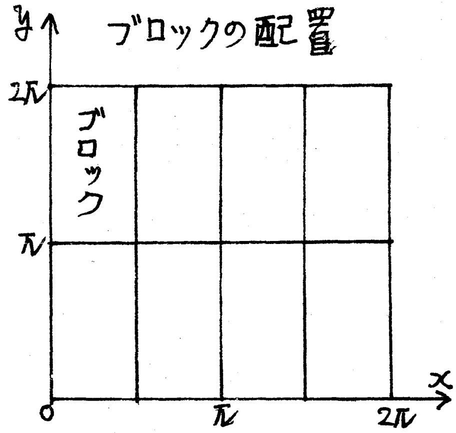
の時の標本点分布は下図のようになる。

ブロック内の標本点分布



●---ブロックの標本点
◎---隣のブロックの標本点

ブロックの配置



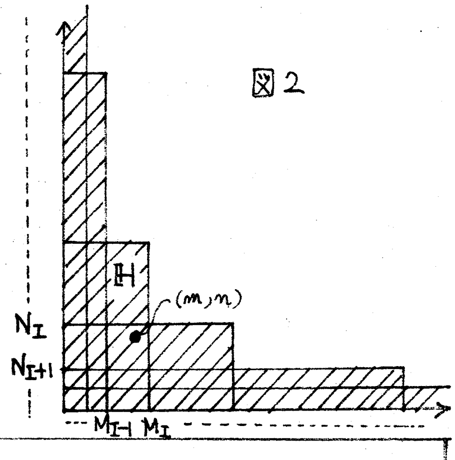
領域$[0,2\pi)\times[0,2\pi)$は，x方向にM_1等分，y方向にN_K等分され，8つのブロックから成る。各々のブロックは，それぞれ図 で示された標本点分布を持つ。ブロック内の標本点の分布は，$\{M_I/M_1\}_{0\le I\le K}$，$\{N_I/N_K\}_{0\le I\le K}$で決定する。つまり

$$K=4 \text{で} \begin{cases} M_1=1,\ M_2=2,\ M_3=4,\ M_4=8 \\ N_1=8,\ N_2=4,\ N_3=2,\ N_4=1 \end{cases}$$

の時の標本点分布と同じ形である。全体としての標本点の分布は，ブロックとブロックの境界に密な網目状の分布となる。

4．基本的な計算法

1.の(B)を満す変換が存在することを示すために，1つの表現を提示する。 3．で述べたように，線型変換である以上，(B)を満すいかなる算法も下の表現に帰着する。



$(m,n)\in\mathbb{H}$ に対して

<1> $M_{I-1}\le m<M_I,\ N_{J+1}\le n<N_J$ （ただし便宜上 $M_0=N_{K+1}=0$ とする）

なる I,J を定める。（図2）

<2> $$C(m,n)=\sum_{L=I}^{J}C_{\overline{M}_L,\overline{N}_L}(m,n)-\sum_{L=I}^{J-1}C_{\overline{M}_L,\overline{N}_{L+1}}(m,n) \quad \text{(4-1)}$$

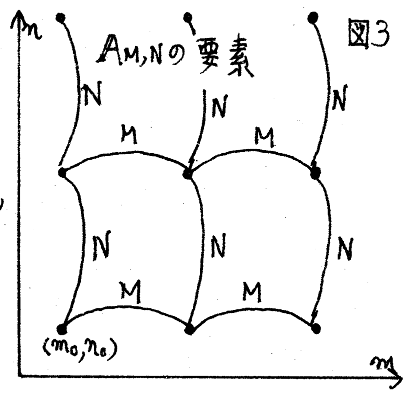
ただし $I=J$ なら第二項＝0

5．(B)の証明

(B)のかわりに(B')を証明すればよい。これまでの m,n,I,J をそれぞれ m_0,n_0,I_0,J_0 と固定する。

[定義5-1] $$\mathbb{A}_{M,N}\equiv\{(m_0+kM,n_0+lN);k,l\in\mathbb{N}^+\}\subset\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+ \quad \text{(5-1)}$$

$\mathbb{A}_{M,N}$は，右図の様に，$\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+$ の間隔 $M\times N$ の部分格子を形成している。



[定義5-2] f の離散型フーリエ変換 $\varphi:\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+\to\mathbb{C}$

$$\varphi(m,n)\equiv a(m,n) \qquad (m,n)\in\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+$$

よく知られているように

$$C_{\overline{M},\overline{N}}(m_0,n_0)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{A}_{M,N}}a(m,n) \quad \text{(5-2)}$$

6

であるから，2.で定義した内積により

$$C_{\overline{M},\overline{N}}(m_0,n_0)=(\chi(\mathbb{A}_{M,N}),\varphi) \quad \text{——————} \quad (5\text{-}3)$$

さらに(4-1)式は

$$C(m_0,n_0)=\sum_{L=I}^{J}(\chi(\mathbb{A}_{M_L,N_L}),\varphi)-\sum_{L=I}^{J-1}(\chi(\mathbb{A}_{M_L,N_{L+1}}),\varphi)$$
$$=(\sum_{L=I}^{J}\chi(\mathbb{A}_{M_L,N_L})-\sum_{L=I}^{J-1}\chi(\mathbb{A}_{M_L,N_{L+1}}),\varphi) \quad \text{———} \quad (5\text{-}4)$$

[定義5-3] $\mathbb{A}_{M,N}$ の $\mathbb{H}$ への制限

$$\mathbb{B}_{M,N}=\mathbb{A}_{M,N}\cap\mathbb{H} \quad \text{——————————} \quad (5\text{-}5)$$

[補題5-1]

$I_0\leq L\leq J_0$ で

$$\mathbb{B}_{M_L,N_L}=\{(m_0+kM_L,n_0);0\leq k<{}^{M_{J_0}}\!/\!_{M_L}\}\cup\{(m_0,n_0+lN_L);0\leq l<{}^{N_{I_0}}\!/\!_{N_L}\} \quad \text{—} \quad (5\text{-}6)$$

$I_0\leq L\leq J_0-1$ で

$$\mathbb{B}_{M_L,N_{L+1}}=\{(m_0+kM_L,n_0);0\leq k<{}^{M_{J_0}}\!/\!_{M_L}\}\cup\{(m_0,n_0+lN_{L+1});0\leq l<{}^{N_{I_0}}\!/\!_{N_{L+1}}\} \quad \text{—} \quad (5\text{-}7)$$

<証明>(5-7)のみ証明する。(5-6)もほぼ同様に証明できる。

① $$p_1=(m_0+M_L,n_0+N_{L+1})\notin\bigcup_{L'=1}^{K}\mathbb{H}_{M_{L'},N_{L'}}=\mathbb{H} \quad \text{——————} \quad (5\text{-}8)$$

なぜなら $\left\{\begin{array}{lll} L'\leq L & \text{の時} & M_{L'}\leq M_L\leq m_0+M_L \\ L'\geq L+1 & \text{の時} & N_{L'}\leq N_{L+1}\leq m_0+N_{L+1}\end{array}\right\}$ で $p_1\notin\mathbb{H}_{M_{L'},N_{L'}}$

② $$p_2=(m_0+M_{J_0},n_0)\notin\mathbb{H} \quad \text{——————————} \quad (5\text{-}9)$$

なぜなら $\left.\begin{array}{l} L'\leq J_0 \text{ の時 } M_{L'}\leq M_{J_0}\leq m_0+M_{J_0} \\ L'\geq J_0+1 \text{ の時 } J_0 \text{ の定義より } N_{L'}\leq N_{J_0+1}\leq n_0\end{array}\right\}$ で $p_2\notin\mathbb{H}_{M_{L'},N_{L'}}$

③ $$p_3=(m_0,n_0+N_{I_0})\notin\mathbb{H} \quad \text{——————————} \quad (5\text{-}10)$$

これも②と同様に証明できる。

④ $p_4 = (m_0 + M_{J_0} - M_L, n_0) \in \mathbb{H}_{M_{J_0}, N_{J_0}} \subset \mathbb{H}$ ——— (5-11)

$m_0 < M_{I_0} \leq M_L \leq M_{J_0}$, $n_0 < N_{J_0}$ より明らか。

⑤ $p_5 = (m_0, n_0 + N_{I_0} - N_{L+1}) \in \mathbb{H}_{M_{I_0}, N_{I_0}} \subset \mathbb{H}$ ——— (5-12)

$m_0 < M_{I_0}$, $n_0 < N_{J_0} \leq N_{L+1} \leq N_{I_0}$ より明らか。

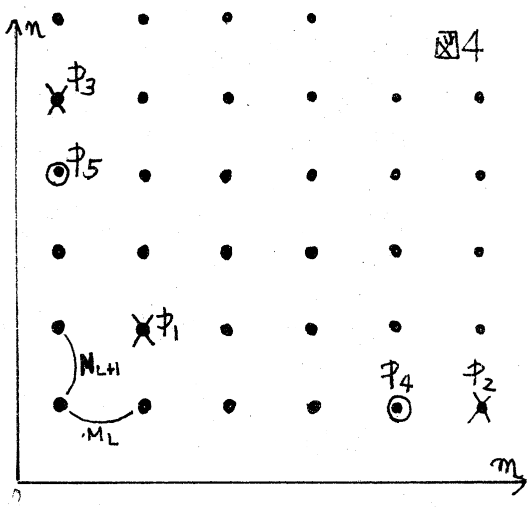
さて，一般に，

$(m, n) \notin \mathbb{H}$, $m' \geq m, n' \geq n \Longrightarrow (m', n') \notin \mathbb{H}$ ——— (5-13)

又，対偶をとって

$(m, n) \in \mathbb{H}$, $m' \leq m, n' \leq n \Longrightarrow (m', n') \in \mathbb{H}$ ——— (5-14)

右図は，$\mathbb{A}_{M_L, N_{L+1}}$ の要素を・で示し，(5-8)〜(5-12) で $\mathbb{H}$ に属すると解ったものに○，属さないと解ったものに× を付けたものである。 (5-8)〜(5-12) と (5-13)(5-14) より，(5-7)が成立する事は明らかであろう。 Q.E.D.



[補題5-2]

$$\chi\left(\bigcap_{L=I_0}^{J_0} \mathbb{B}_{M_L, N_L}\right) = \sum_{L=I_0}^{J_0} \chi(\mathbb{B}_{M_L, N_L}) - \sum_{L=I_0}^{J_0-1} \chi(\mathbb{B}_{M_L, N_{L+1}}) \quad \text{——— (5-15)}$$

ただし $I_0 = J_0$ なら 第二項 $= 0$

<証明> $I_0 \leq J \leq J_0$ なる J について，(5-15) の J_0 を J で置換えた式を証明する。 J に関する帰納法を用いる。

① $J = I_0$ の時，(5-15) は $\mathbb{B}_{M_{I_0}, N_{I_0}} = \mathbb{B}_{M_{I_0}, N_{I_0}}$ で成立

② $J = I_0 + 1$ の時，補題5-1より

$$\mathbb{B}_{M_{I_0},N_{I_0}} \cup \mathbb{B}_{M_{I_0+1},N_{I_0+1}} = \mathbb{B}_{M_{I_0},N_{I_0+1}}$$

これを(2-3)式に代入してやれば

$$\chi(\mathbb{B}_{M_{I_0},N_{I_0}}) + \chi(\mathbb{B}_{M_{I_0+1},N_{I_0+1}}) = \chi(\mathbb{B}_{M_{I_0},N_{I_0}} \cap \mathbb{B}_{M_{I_0+1},N_{I_0+1}}) + \chi(\mathbb{B}_{M_{I_0},N_{I_0+1}})$$

でこの式は(5-15)に他ならない。

③ $J_0 \geq J \geq I_0 + 2$ の時，(2-3)式より

$$\chi\Big(\bigcap_{L=I_0}^{J} \mathbb{B}_{M_L,N_L}\Big) = \chi\Big(\bigcap_{L=I_0}^{J-1} \mathbb{B}_{M_L,N_L}\Big) + \chi(\mathbb{B}_{M_J,N_J}) - \chi\Big(\Big(\bigcap_{L=I_0}^{J-1} \mathbb{B}_{M_L,N_L}\Big) \cup \mathbb{B}_{M_J,N_J}\Big) \text{———} (5\text{-}16)$$

しかるに $L \leq J$ なら補題5-1より .

$$\mathbb{B}_{M_L,N_L} \cup \mathbb{B}_{M_J,N_J} = \mathbb{B}_{M_L,N_J}$$

故に $\Big(\bigcap_{L=I_0}^{J-1} \mathbb{B}_{M_L,N_L}\Big) \cup \mathbb{B}_{M_J,N_J} = \bigcap_{L=I_0}^{J-1} (\mathbb{B}_{M_L,N_L} \cup \mathbb{B}_{M_J,N_J}) = \bigcap_{L=I_0}^{J-1} \mathbb{B}_{M_L,N_J}$

$$= \Big(\bigcap_{L=I_0}^{J-1} \{(m_0 + kM_L, n_0) : 0 \leq k < M_{J_0}/M_L\}\Big) \cup \{(m_0, n_0 + lN_J) : 0 \leq l < N_{I_0}/N_J\}$$

$$= \{(m_0 + kM_{J-1}, n_0) \mid 0 \leq k < M_{J_0}/M_{J-1}\} \cup \{(m_0, n_0 + lN_J) : 0 \leq l < N_{I_0}/N_J\}$$

$$= \mathbb{B}_{M_{J-1},N_J}$$

これを(5-16)式に代入し，さらに(5-16)式右辺第一項を帰納法の仮定により展開すれば，

$$\chi\Big(\bigcap_{L=I_0}^{J} \mathbb{B}_{M_L,N_L}\Big) = \sum_{L=I_0}^{J-1} \chi(\mathbb{B}_{M_L,N_L}) - \sum_{L=I_0}^{J-2} \chi(\mathbb{B}_{M_L,N_{L+1}})$$

$$+ \mathbb{B}_{M_J,N_J} - \mathbb{B}_{M_{J-1},N_J}$$

$$= \sum_{L=I_0}^{J} \chi(\mathbb{B}_{M_L,N_L}) - \sum_{L=I_0}^{J-1} \chi(\mathbb{B}_{M_L,N_{L+1}}) \text{————} (5\text{-}17)$$

(5-17)式で $J = J_0$ とすれば(5-15)式である。　　　Q.E.D.

〔定理5-1〕〔4.で定義された $C(m,n)$ は(B)を満す。

〈証明〉(5-4)を(2-4)により，$\mathbb{H}$ 内の係数による寄与項と，$\mathbb{H}$ 外の係数による寄与項に分けてやると

$$C(m_0,n_0)=\left(\sum_{L=I_0}^{J_0}\chi(\mathbb{B}_{M_L,N_L})-\sum_{L=I_0}^{J_0-1}\chi(\mathbb{B}_{M_L,N_{L+1}}),\ \varphi\right)$$
$$+\left(\sum_{L=I_0}^{J_0}\chi(\mathbb{A}_{M_L,N_L}-\mathbb{H})-\sum_{L=I_0}^{J_0-1}\chi(\mathbb{A}_{M_L,N_{L+1}}-\mathbb{H}),\ \varphi\right) \quad \text{——— (5-19)}$$

ところが

$$\bigcap_{L=I_0}^{J_0}\mathbb{B}_{M_L,N_L}=\mathbb{B}_{M_{J_0},N_{I_0}}=\{(m_0+kM_{J_0},n_0)\,|\,0\le k<M_{J_0}/M_{J_0}\}\cup\{(m_0,n_0+lN_{J_0});\,0\le l<N_{I_0}/N_{I_0}\}$$
$$=\{(m_0,n_0)\} \quad \text{——— (5-20)}$$

故に，補題5-2より

$$C(m_0,n_0)=a(m_0,n_0)+\left(\sum_{L=I_0}^{J_0}\chi(\mathbb{A}_{M_L,N_L}-\mathbb{H})-\sum_{L=I_0}^{J_0-1}\chi(\mathbb{A}_{M_L,N_{L+1}}-\mathbb{H}),\ \varphi\right) \quad \text{——— (5-21)}$$

もちろん，第二項は $a(m,n):(m,n)\in\mathbb{H}$ の項を含んでいない。

故に $C(m_0,n_0)$ が(B)を満すことが証明された。　　　　Q.E.D.

6．メモリーと計算量の節約

実際に $C(m,n)$ を求める時，(4-1)式をそのまま使うことには少し問題がある。　(4-1)式右辺の各項 $C_{\overline{M_L},\overline{N_L}}(m,n):I_0\le L\le J_0$ $C_{\overline{M_L},\overline{N_{L+1}}}(m,n):I_0\le L\le J_0-1$ を独立してそれぞれ求めると，重複して計算される部分が多く出てしまう。　たとえば，以下に述べるように，$C_{\overline{M_L},\overline{N_{L+1}}}(m,n)$ は $C_{\overline{M_L},\overline{N_L}}(m,n)$ を求めるときの途中結果である。　$\mathbb{H}$ が簡単な形の時(Kが小さい時)は，以下に示すように簡単に計算手順を合理化できる。　準備として，台形則の合成について少し述べる。

台形則の一次元の離散型フーリエ変換は，分割数½の台形則と中点則に分解される。しかも，分解された分割数½の台形則と中点則は共通の標本点を持たない。直積型の変換でも同様の性質が成り立ち，たとえば

$$\begin{cases} C_{\overline{2M},N}(m,n) = (C_{\overline{M},N}(m,n) + C_{M,N}(m,n))/2 \\ C_{2M,N}(M+m,n) = (C_{\overline{M},N}(m,n) - C_{M,N}(m,n))/2 \end{cases} \qquad (6\text{-}1)$$

と分解され，$\mathbb{P}_{\overline{M},N} \cap \mathbb{P}_{M,N} = \phi$，$\mathbb{P}_{\overline{M},N} \cup \mathbb{P}_{M,N} = \mathbb{P}_{\overline{2M},N}$ —— (6-2)

(4-1)式の計算に必要な台形則×台形則は

$$\{C_{\overline{M}_L,\overline{N}_L}\}_{1\le L\le K} \cup \{C_{\overline{M}_L,\overline{N}_{L+1}}\}_{1\le L\le K-1} \qquad (6\text{-}3)$$

であるが，$M=M_1$, $N=N_K$ とすると，(6-1)を次々に適用して $C_{\overline{M}_L,\overline{N}_L}$ は，

$$\{C_{\overline{M},\overline{N}}\} \cup \{C_{\overline{M},N'}\}_{N\le N'<N_L} \cup \{C_{M',\overline{N}}\}_{M\le M'<M_L} \cup \{C_{M',N'}\}^{M\le M'<M_L}_{N\le N'<N_L} \qquad (6\text{-}4)$$

から線型結合として合成される。しかも，$\mathbb{P}_{\overline{M},\overline{N}}$，$\mathbb{P}_{\overline{M},N'}: N\le N'<N_L$，$\mathbb{P}_{M',\overline{N}}: M\le M'<M_L$，$\mathbb{P}_{M',N'}: {}^{M\le M'<M_L}_{N\le N'<N_L}$ は互に共通点を持たない。

分解をすべての $1\le L\le K$ について行なえば，(6-3)即ち(4-1)式が

$$\{C_{\overline{M},\overline{N}}\} \cup \{C_{\overline{M},N'}\}_{N\le N'<N_1} \cup \{C_{M',\overline{N}}\}_{M\le M'<M_K} \cup \bigcup_{1\le L\le K} \{C_{M',N'}\}^{M\le M'<M_L}_{N\le N'<N_L} \qquad (6\text{-}5)$$

の線型和で計算できることがわかる。しかも

$$\{\mathbb{P}_{\overline{M},\overline{N}}\} \cup \{\mathbb{P}_{\overline{M},N'}\}_{N\le N'<N_1} \cup \{\mathbb{P}_{M',\overline{N}}\}_{M\le M'<M_K} \cup \bigcup_{1\le L\le K} \{\mathbb{P}_{M',N'}\}^{M\le M'<M_L}_{N\le N'<N_L} \qquad (6\text{-}6)$$

の各要素が互に共通の標本点を持たないことも明らかである。

このことから，次の算法が導かれる。

<1>(6-6)の要素である標本点集合（たとえば $\mathbb{P}_{M',\overline{N}}$）上の標本値をそれぞれ求めておく。

〈2〉対応する直積型離散型フーリエ係数をFFTで計算し（$C_{M,\overline{N}}$）標本値（$\mathbb{D}_{M,\overline{N}}$）の上に重ね書きする。このようにして（6−5）の要素をすべて求める。

〈3〉(6−5)の要素の線型和として $C(m,n)$ を計算する。

Kが小さい時は，〈3〉は少ないメモリーをバッファにして簡単に重ね書きの形式にできる。

例えば，$K=3$ として $M_I=2^{I-1}M$，$N_I=2^{3-I}\cdot N : 1\le I\le 3$ の時，

(4−1)式に必要な台形則は，

$$\{C_{4\overline{M},\overline{N}},\ C_{2\overline{M},2\overline{N}},\ C_{\overline{M},4\overline{N}},\ C_{\overline{M},2\overline{N}},\ C_{2\overline{M},\overline{N}}\} \text{ ——— } (6\text{−}3)'$$

これは

$$\{C_{2M,\overline{N}},\ C_{\overline{M},2N},\ C_{\overline{M},\overline{N}},\ C_{\overline{M},N},\ C_{M,\overline{N}},\ C_{M,N}\} \text{ ——— } (6\text{−}5)'$$

から次の様に合成される。

$0\le m\le M-1$，$0\le n< N-1$ として，

$$\left.\begin{aligned}
C(m+3M,n)&=(d-c-2a)/4\\
C(m+2M,n)&=(d+c-2b)/4\\
C(m+M,n)&=(2a+f-e)/4\\
C(m,n)&=(2b+2g+e-d)/4\\
C(m+M,n+N)&=(d-c-e+f)/4\\
C(m,n+N)&=(2h+c-e)/4\\
C(m,n+2N)&=(d+f-2g)/4\\
C(m,n+3N)&=(d-f-2h)/4
\end{aligned}\right\}\text{ただし}\left\{\begin{aligned}
a&=C_{\overline{M},2N}(m,n+N)\\
b&=C_{\overline{M},2N}(m,n)\\
c&=C_{\overline{M},N}(m,n)\\
d&=C_{\overline{M},\overline{N}}(m,n)\\
e&=C_{M,N}(m,n)\\
f&=C_{M,\overline{N}}(m,n)\\
g&=C_{2M,\overline{N}}(m,n)\\
h&=C_{2M,\overline{N}}(m+M,n)
\end{aligned}\right. \text{ —— } (6\text{−}7)$$

だから，〈3〉は，a～hの8つのバッファを使用して，各 $0 \le m \le M-1$, $0 \le n \le N-1$ について，

$C(m+3M,n) \to C_{\bar{M},2N}(m,n+N)$ ，$C(m+2M,n) \to C_{\bar{M},2N}(m,n)$

$C(m+M,n) \to C_{\bar{M},N}(m,n)$ ，$C(m,n) \to C_{\bar{M},\bar{N}}(m,n)$

$C(m+M,n+N) \to C_{M,N}(m,n)$ ，$C(m,n+N) \to C_{M,\bar{N}}(m,n)$

$C(m,n+2N) \to C_{2M,\bar{N}}(m,n)$ ，$C(m,n+3N) \to C_{2M,\bar{N}}(m+M,n)$

と重ね書きできる。 まとめれば

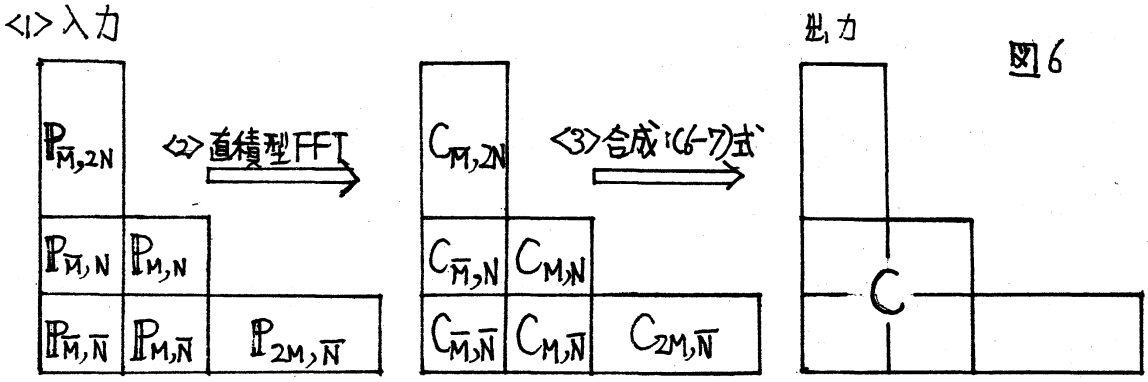


図6

7. 本方法が有効な函数

本方法が有効な函数には，次のものがある。

[例1] $g(x)$, $h(y)$ が k 回連続微分可能で

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b(m) \cdot e^{imx}, \quad h(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) e^{iny}$$

とすると， $f(x,y) \equiv g(x) h(y)$ とおいて

$$\begin{cases} a(m,n) = b(m) \cdot c(n) \\ b(m) = O(m^{-k}), \quad c(n) = O(n^{-k}) \end{cases}$$

だから $a(m,n) = O((m \cdot n)^{-k})$ となり絶対値の大きな係数が双曲線の内部に集まる傾向を持つ。 従って，$g_i(x)$, $h_i(x)$

が k_i 回連続微分可能で

$$f(x,y) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i g_i(x) h_i(y) \text{ ——————————— } (7\text{-}1)$$

が速く収束するなら $f(x,y)$ の絶対値の大きい係数も又，双曲線の内部に集まることが期待できる。

本方法が有効で，応用範囲の広い函数族を見つける事は，今後の課題である。